УДК 372.851

МЕТОД АНАЛОГИИ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Заводская Валерия Витальевна,
студентка 4 курса факультета математики, информатики и физики
Волгоградского государственного социально-педагогического университета
Смыковская Татьяна Константиновна,
доктор педагогических наук, профессор
Волгоградского государственного социально-педагогического университета

Аннотация. В статье представлен материал о методе аналогии при изучении математики в школе. Дан обзор к пониманию сущностных характеристик метода аналогии, приведены примеры использования аналогии в школьной математике.

Ключевые слова: обучение геометрии, метод аналогии; умозаключение, аналогия математических понятий, аналогия в доказательствах.

В настоящее время объем знаний, получаемый людьми, значительно больше того, которым может овладеть один человек. В связи с этим методы, позволяющие самостоятельно получать необходимую информацию, крайне важны. Одним из таких методов является аналогия, т.к. она дает возможность получать новые знания с опорой на уже имеющие знания и опыт. По аналогии проводится работа с умозаключениями, понятиями, теоремами, доказательствами теорем и задач.

Умозаключение по аналогии – это получение знаний о малоизученном предмете путем переноса на него знаний о подобных ему предметах по каким-то существенным для данного рассмотрения признакам [2].

Для вывода в умозаключениях по аналогии обладают вероятностным характером, при этом вероятностное знание, предположение несет в себе нечто новое. Аналогия, как отмечают философы и психологи, приводит к догадкам, прогнозам и гипотезам, позволяет формулировать идеи, предположения [3].

Примером мысленного переноса понятий и сужденийпланиметрии в стереометрию является установление возможности переноса свойств и отношений плоскостных фигур в трехмерное пространство. Так прямоугольник аналогичен прямоугольному параллелепипеду, т.к. отношения между сторонами прямоугольника сходны с отношениями между гранями параллелепипеда. Для прямоугольника выполняется отношение: каждая сторона прямоугольника параллельна и равна одной другой стороне и перпендикулярна остальным. Для прямоугольного параллелепипеда – каждая грань прямоугольного параллелепипеда параллельна и равна одной другой грани и перпендикулярна остальным.

Анализ содержания понятий «прямоугольник» и «прямоугольный параллелепипед», а также их свойств показал, что аналогия существует и между формулами нахождения площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда. Во-первых, это сходство формул $S = a \cdot b$ и $V = a \cdot b \cdot c$. Во-вторых, сходство в структуре и логике вывода этих формул при различных единицах измерения элементов указанных фигур (величины измеряются натуральными, положительными рациональными и действительными числами).

Р.Ю. Костюченко отмечают, что школьников необходимо учить осуществлять поиск сходств, которыеопределяют возможность реализовывать аналогию между объектами даже когда природа сопоставляемых объектов одинакова.

Например, одинакова природа двухтаких геометрических фигур, как треугольник и тетраэдр. Треугольник – плоская фигура, тетраэдр – пространственная. Первым предположением о сходстве этих объектов может выступить тот факт, что грани тетраэдра – это треугольники. Приняв это за сходство, путем рассуждений мы пришли к выводу, что данное сходство не может быть источником для рассуждений по аналогии. При более глубоком исследовании треугольника и тетраэдра раскрывается еще одно свойство: треугольник и тетраэдр – ограниченные выпуклые множества точек, которое является источником аналогии, ведущим к открытиям. Первая фигура образованна минимальным числом прямых в пространстве, вторая – минимальным числом плоскостей в пространстве. Но отсюда не следует, что все свойства этих точек будут одинаковы. Установленное «сходство» дает нам право предполагать, что и некоторые другие свойства треугольника «переводятся» в свойства тетраэдра.

Теперь, исходя из установленного сходства и из того, что « в треугольнике биссектрисы углов пересекаются в одной точке и эта точка – центр вписанной окружности», мы приходим к предположению, что «в тетраэдре биссекторные плоскости двугранных углов пересекаются в одной точке и эта точка – центр вписанной сферы», и т.д. Формулируются новые свойства тетраэдра. Рассуждая по аналогии. Эти свойства, естественно, требуют доказательства, так как заключения по аналогии могут оказаться ложными.

Рассмотрим несколько задач, позволяющих описать общую характеристику приема аналогии и выделить действия, его составляющие. В качестве примеров приведем формулировки двух задач на доказательство: 1) докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и в точке их пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины; 2) докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и в точке их пересечения делятся в отношении 3:1, считая от вершины.

Рассуждения в доказательствах приведенных задач 1 и 2 опираются на аналогию между треугольником и тетраэдром. В ходе выполнения подобных заданий процесс выделения конкретного объекта из множества; упор на взаимосвязи, определяющие последовательную реализацию рассуждений, запускает у учащегося механизм предвосхищения результата, что задает ориентир для последующей актуализации и развития его учебной мотивации [1].

Методисты рекомендуют проводить аналогию между планиметрическими фигурами и стереометрическими и соответствующими им теоремами. Так в статьях «Аналог теоремы Пифагора в стереометрии» и «Изучаем пространственную теорему Пифагора» из журнала «Математика в школе» проводится аналогия между прямоугольным треугольником и треугольной пирамидой. Как известно, в школьной геометрии рассматривается большое количество теорем и формул для прямоугольного треугольника, основа которых – теорема Пифагора. Авторы данных статьей считают, что теорема Пифагора будет справедлива и для прямоугольной пирамиды, если вместо длин катетов взять площади трех граней с прямыми углами, а вместо длины гипотенузы – площадь оставшейся грани, четвертой. Приведем несколько теорем и формул, аналогичных и для прямоугольной пирамиды, взятых из указанных статей.

Формула 1. Пусть дан в пространстве произвольный треугольник ABC, ортогонально спроектированный на плоскостьβ, проходящую через одну из его сторон, например сторону AB. Пусть $\angle(ABC;\ \beta) = \varphi$ (рис. 1). Тогда нетрудно доказать, что$S_{AOB} = S_{ABC}\ \cdot cos\varphi$. Данная формула позволяет определить тригонометрические функции двугранного угла, не сводя их к тригонометрическим функциям плоского угла. Эта формула приводит к мысли, что прямоугольный треугольник аналогичен пирамиде.

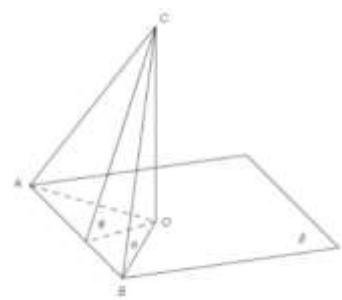

Рис. 1. Угол между плоскостями

Формула 2. Если в прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе поведена высота $CD = h$, делящая ее на отрезки x и y, то $h^2 = xy$.

В прямоугольной пирамиде аналогом высоты является треугольник$COH (CH \perp AB)$. Введем следующие обозначения (рис. 2): $S_{\Delta COH} = h$; $S_{\Delta CAH} = x$; $S_{\Delta CBH} = y$. Тогда $h^2 = \frac{1}{4} OH^2 \cdot OC^2$.

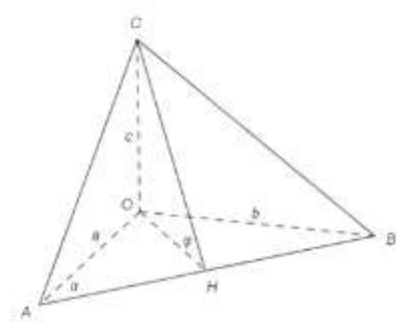

Рис. 2. Прямоугольная пирамида как аналог прямоугольного треугольника

Делается замена OH^2 на произведение AH и BH, а OC^2 – на $sin^2\varphi \cdot CH^2$ и затем

$$h^2 = \frac{1}{2} AH \cdot CH \cdot \frac{1}{2} HB \cdot CH \cdot sin^2\varphi.$$

В результате выражение принимает вид: $h^2 = x \cdot y \cdot sin^2\varphi$.

Например, аналогом теоремы Пифагора в стереометрии является соотношение для прямоугольного параллелепипеда: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где d – диагональ параллелепипеда, а a, b, c – величины трех его измерений.

Использование аналогии на уроках геометрии способствует также и само логическое строение геометрии: многие геометрические понятия определяются через другие понятия и предельное преобразование одних геометрических объектов приводят к образованию других. При этом умозаключения, сделанные по аналогии, всегда требуют доказательств.

Список литературы:

1. Дорофеев С.Н. Личностно ориентированный подход как основа построения индивидуальных траекторий обучения математике // Мир науки, культуры и образования. 2013. №2(30). С.48–50.

2. Костюченко Р.Ю. Аналогия в науке и обучении // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2017. №4 (24). С.136–142.

3. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя / С.Г. Манвелов. М.: Просвещение, 2005. 175 с.