ARTICLE HISTORY: Received: May 3, 2021 Accepted: June 24, 2021 Published: July 3, 2021

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПУТЕМ РАЗНЫХ ВАРИАНТОВ

Хадбаатар[1] Б., Магсар[2] Р.

[1]Монгольский государственный педагогический университет (МГПУ), Педагогическая школа, Кафедра математики, естественных наук*

[2] Монгольский государственный педагогический университет (МГПУ), Педагогическая школа, Кафедра математики, естественных наук

SOLUTION OF ONE TASK BY DIFFERENT OPTIONS

Hadbaatar [1] B., Magsar [2] R.

[1] Mongolian State Pedagogical University (MGPU), School of Education, Department of Mathematics, Natural Sciences*

[2] Mongolian State Pedagogical University (MGPU), School of Education, Department of Mathematics, Natural Sciences

Аннотация. Наше исследование основано на идее, что решение задач - это основной вид деятельности при изучении и преподавании математики. По традиционным учебным программам рекомендовалось решение задач одним способом с одним ответом. Однако, в настоящее время, начали говорить о необходимости обучения навыкам решения задач многими способами с многими ответами и выбирать наиболее рациональный из них. Поэтому, в рамках курса «Творческое мышление» мы организовали самостоятельную деятельность студентов-преподавателей, мыслящих разными способами, и провели исследования по развитию их навыков решения задач в течение нескольких семестров учебного года. В результате они нашли свои собственные способы самостоятельного решения задач, и в результате взаимообмена способами решения задач между студентами и преподавателями, они смогли выполнить 26 вариантов одной и той же задачи. Этим мы попытались подчеркнуть важность решения задач с помощью различных способов.

Abstract. Our research is based on the idea that problem solving is a core activity in the study and teaching of mathematics. The traditional curriculum recommended solving problems in one way with one answer. However, at the present time, they began to talk about the need to learn the skills of solving problems in many ways with many answers and to choose the most rational one. Therefore, as part of the Creative Thinking course, we organized the independent activities of student teachers who think in different ways, and conducted research on the development of their problem solving skills over several semesters of the academic year. As a result, they found their own ways to independently solve problems, and as a result of the interchange of ways to solve problems between students and teachers, they were able to complete 26 variants of the same problem. By this we tried to emphasize the importance of solving problems using different methods.

Ключевые слова: различные способы решения, студент-преподаватель**,** творческая деятельность

Keywords: different ways of solving, student-teacher, creative activity

---

ВВЕДЕНИЕ

Наше исследование основано на двух точках зрения, а именно:

Во-первых, считается, что решение математических задач является ядром деятельности при изучении и преподавании математики. [1]

Основываясь на исследовании, которое показало, что решение математических задач различными способами является эффективным инструментом повышения профессиональных навыков учителей математики, в рамках данной исследовательской работы мы включили ряд задач с многими решениями специально разработанных для этого. [2]

Во-вторых, мы рассматриваем тесты по математике как ключевой элемент любого образовательного процесса, а также идею о том, что основная роль учителей в классе состоит в том, чтобы ставить перед учащимися сложные задачи.[3]

Прошло более 30 лет после внедрения вопроса решения математических задач различными способами в международное математическое обучение. В нашей стране эта тенденция находится только на начальном этапе. Это ограничивается отражением немногочисленных математических задач в школьных учебниках начальных классов. Таким образом, обучение студентов-учителей начальных школ навыкам решения и преподавания математических задач многими способами является актуальной задачей школ математического образования, подготавливающих сегодняшних учителей начальных школ. Чтобы решить эту проблему, мы организовали самостоятельную работу по достижению многих решений разными способами в ходе предмета “творческое мышление” и достигли желаемых результатов.

ИЗУЧЕННОСТЬ ТЕМЫ

Японские ученые первыми изучили этот метод решения открытых проблем, вытекающих из теории конструктивизма построения знаний. Согласно С.Шимаде, при “открытом подходе” к преподаванию деятельность учащихся должна включать в себя.[4]:

математизацию знаний; умелое использование знаний и умений; поиск математических правил или отношений; решение задач; видение «открытий» и результатов других учащихся; рассмотрение и сравнение различных идей, предложенных разными учениками (проверка “математического качества” этих идей); изменение и дальнейшее развитие идей учащихся. Еще один японский исследователь Н.Нохда пишет, что идея “открытого подхода” заключается во взаимодействии между математическими идеями и поведением учащихся при решении задач. Задача рассматривается ни просто как упражнение, а как проблема, которую ставит перед учениками учитель. "Открытый подход” предполагает, что сами задачи должны заключать в себе математические идеи. Для его реализации используют задачи следующих типов: Проблемные ситуации; задачи – процессы (с неполным процессом данных; учащиеся должны добавить условие, сформулировать и решить задачу); с открытыми концами (задачи, которые учащиеся могут переформулировать, получая новые); порождающие (“углубляя” которые, можно получить новые, более сложные, иллюстрирующие интересные математические идеи задачи); со многими решениями. [5]

О значении “открытого подхода” говорил и другой американский исследователь – Дж. Беккер, а Борис Иванович Ивлев выдвигал методические способы решения проблем многими способами. [6]

Принимая во внимание мнения ученых, рассматриваем задачи со следующими составными, как «Открытые задачи", а именно:

- Задачи, решаемые многими способами
- Задачи, интерпретируемые по-разному
- Задачи, вытекающие из других задач, или являющиеся продолжением данных задач

Задачи со многими ответами.

МЕТОДИКА

Некоторые студенты-преподаватели выполнили процесс решения задач в пять основных этапов. Это: - Понимание, - Описание, - Планирование, - Выполнение, - Пересмотр. [7]

С точки зрения методики преподавания решения задач, конструктивизм основан на творческой деятельности ученика, который объясняет и защищает открытый им способ решения в трех стадиях: сам ученик - в паре - в группе - классом. Здесь студент-преподаватель приобретает такие важные навыки, как самостоятельная работа, совместное обучение и освоение методов открытия.

В первом семестре 2019-2020 учебного года в один из 50-балльных вариантов самостоятельной работы по предмету "Творческое мышление", который был включен в учебную программу Педагогической школы, была отражена тема "Открытые задачи". Студентам-преподавателям было предложено решить только одну задачу самостоятельно, многими способами, являющейся одним вариантом окрытых задач, и студенты-преподаватели объясняли и защищали свои открытия перед другими. Со стороны преподавателя была оказана поддержка данным командам.

Задача 1: Сторона BC прямоугольного треугольника ABC равна 4 см. Если биссектриса CD, проводящаяся с вершины прямого угла Если биссектриса CD, проведенная из вершины прямоугольника, разделила гипотенузу на AD = 15/7 см; BD = 20/7 см, найдите длину стороны AC как можно большим количеством способов.

Возможно дополнительное построение/

Вариант решения 1.

Можно ли найти длину гипотенузы? AB= AD+BD= $\frac{15}{7}+\frac{20}{7}=\frac{35}{7}$ = 5см. Исходя из теоремы Пифагора $AC^2+BC^2=AB^2$; $AC^2=AB^2-BC^2$ получается $AC^2=5^2-4^2$; $AC^2=9$; AC= 3 см.

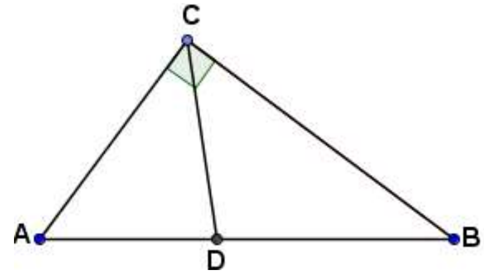


Рисунок 1: Теорема Пифагора

Вариант решения 2.

Если использовать свойство биссектрисы треугольника, то AC·BD= BC·AD; $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$; $\frac{AC}{4}=\frac{15}{7}\cdot\frac{7}{20}$; $\frac{AC}{4}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$; $\frac{AC}{4}=\frac{3}{4}$ AC= 3 см. Далее, можно использовать соотношение $\frac{AD}{BD}=\frac{15}{7}\cdot\frac{7}{20}=\frac{3}{4}$

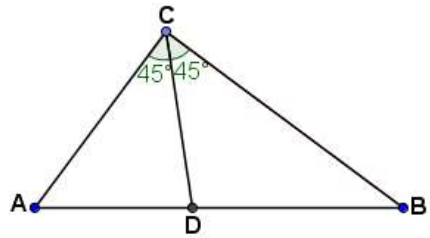


Рисунок 2: Свойство биссектрисы треугольника

Вариант решения 3.

Биссектриса любого треугольника делит противоположную сторону на 2 части. А в отношении данных разделенных частей выполняются следующие свойства. AD=$\frac{AB\cdot AC}{AC+BC}$; BD=$\frac{AB\cdot BC}{AC+BC}$. Мы можем разрешить данный вопрос, заменяя заданные условия. Решить задачу можно, заменив условия, приведенных в одном из равенств. AB= AD+BD= $\frac{15}{7}+\frac{20}{7}=\frac{35}{7}$ = 5см

$\frac{20}{7}=\frac{5\cdot 4}{AC+4}=\frac{20}{7}=\frac{20}{AC+4}$ =>7=AC+4; AC=3 см

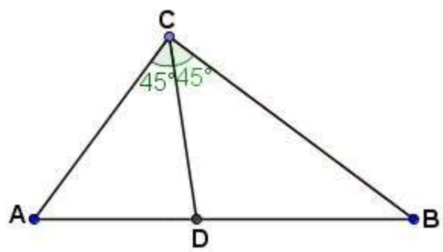


Рисунок 3: Свойство биссектрисы треугольника

Вариант решения 4.

Соотносим площади следующих двух треугольников. Из $S_{ACD}=\frac{AC}{2}\cdot DM$; $S_{DCB}=\frac{BC}{2}\cdot DN$ получаем $\frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}=\frac{AC\cdot DM}{2}:\frac{BC\cdot DM}{2}=>\frac{AC\cdot DM}{2}\cdot\frac{2}{BC\cdot DM}=\frac{AC}{BC}$

Также, если использовать соотношение площадей $\frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}=\frac{AD}{BD}$, получаем $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$.

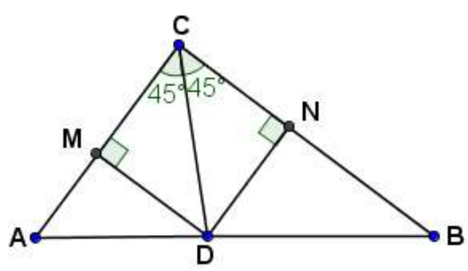


Рисунок 4: Соотношение площадей

Вариант решения 5.

Находим площади треугольников и сравним. $S_{ACD}=\frac{AC\cdot CD}{2}\cdot sin\,45^0$;

$S_{DCB}=\frac{BC\cdot CD}{2}\cdot sin45^0$ $\frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}=\frac{AC\cdot CD}{2}\cdot sin45^0:\frac{BC\cdot CD}{2}\cdot sin45^0 =>\frac{AC\cdot CDsin\,45^0}{2}\cdot\frac{2}{BC\cdot CDsin\,45^0}=\frac{AC}{BC}$. Также, треугольники ACD и DCB имеют одну общую длину CE, то выходит $\frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}=\frac{AD}{BD}$. И, так как $\frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}=\frac{AC}{BC}$ и $\frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}=\frac{AD}{BD}$, то $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$

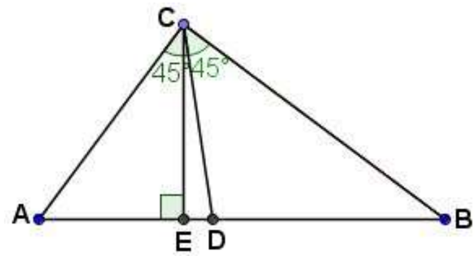


Рисунок 5: Соотношение площадей

Вариант решения 6.

AB= AD+BD= $\frac{15}{7}+\frac{20}{7}=\frac{35}{7}$ = 5 см AB=5 см; BC=4 см;если угол ∢CAB возьмем за угол α , и $Sin\alpha=\frac{4}{5}$; $Cos\alpha=\frac{AC}{5}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ заменим основным тождеством, то $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{AC}{5}\right)^2=1$

$4^2+AC^2=25$; $AC^2=25-16$; $AC^2=9$; AC=3 см

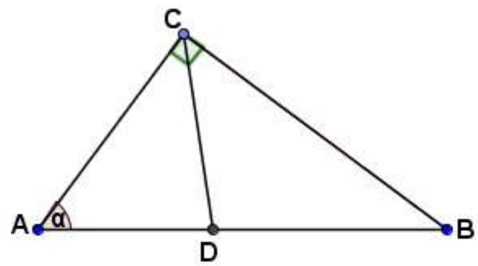


Рисунок 6: Основное тождество

Вариант решения 7.

Можно решить, используя теорему синуса.

$\frac{BD}{\sin 45^0}=\frac{BC}{\sin\alpha}$; $\frac{AD}{\sin 45^0}=\frac{AC}{\sin(180^0-\alpha)}$; $\frac{BD}{BC}=\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha}$; $\frac{AD}{AC}=\frac{\sin 45^0}{\sin(180^0-\alpha)}=\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha}$

$\frac{BD}{BC}=\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha}$; $\frac{AD}{AC}==\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha}$ $\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$. Здесь использована формула тригонометрической функции приведения $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$. $\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$; $\frac{20}{7}\div 4=\frac{15}{7}\div AC$=> AC=3 см

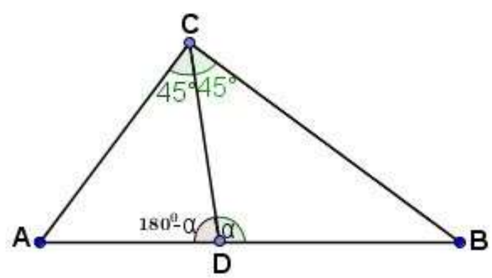


Рисунок 7: Теорема синуса

Вариант решения 8.

В отношении треугольника DCB $\frac{\sin 45^0}{BD}=\frac{\sin\beta}{CD}$; В отношении треугольника ACD $\frac{\sin 45^0}{AD}=\frac{\sin\alpha}{CD}$:

Если с каждого из них найти $\sin 45^0$, $\frac{BD\cdot\sin\beta}{CD}$; $\sin 45^0=\frac{AD\cdot\sin\alpha}{CD}$ и уравнить их, то получаем $BD\cdot\sin\beta=AD\cdot\sin\alpha$; $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BD}{AD}$. Из треугольника ABC получаем $\frac{\sin\alpha}{BC}=\frac{\sin\beta}{AC}$=> $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BC}{AC}$ $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$ и т.к $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => то, AC=3 см

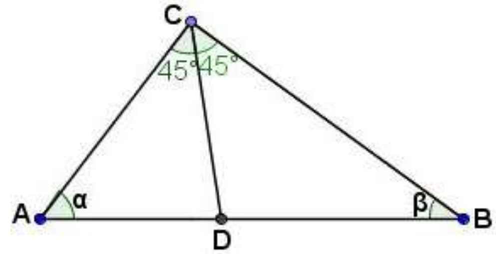


Рисунок 8: Теорема синуса

Вариант решения 9.

Можно импользовать теорему косинуса. AB= AD+BD= $\frac{15}{7}+\frac{20}{7}=\frac{35}{7}$; AB=5см;

AO=OB=2.5; ∡AOC= α; ∡AOC=$(180^0$-$\alpha)$; $AC^2= AO^2+ OC^2-2AO\cdot OC\cdot Cos\alpha$

$BC^2= CO^2+ OB^2-2CO\cdot OB\cdot Cos(180^0-\alpha)$; $AC^2= 2.5^2+ 2.5^2-2\cdot 2.5\cdot 2.5\cdot Cos\alpha$

$4^2= 2.5^2+ 2.5^2+2\cdot 2.5\cdot 2.5\cdot Cos\alpha$; Если сложить их, то получаем

$AC^2+4^2=4\cdot 2.5^2$; $AC^2=25-16$; $AC^2=9$; AC=3 см. Здесь использована формула приведения $cos(180^0-\alpha)= - cos\alpha$.

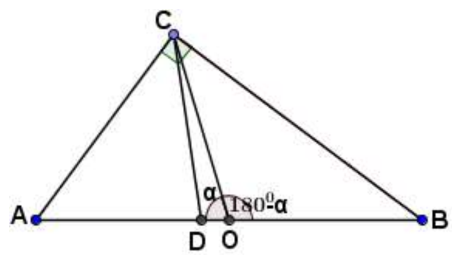


Рисунок 9: Теорема Косинуса

Вариант решения 10.

Если назовем E точку пересечения прямой, проходящей через дугу CD с радиусом BD с центром в точке B, и когда BD = BE; ∡BDE = ∡BED, то DBE - равносторонний треугольник. Также, есть треугольники $\Delta ADC \sim \Delta BEC$ с вертикальными углами ∡ADC=∡BDE. Соотношение таких подобных треугольников выглядит следующим образом: $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BE}$; DD=BE $\Rightarrow \frac{AC}{4}=\frac{AD}{BD}$; $\frac{AC}{4}=\frac{3}{4}$

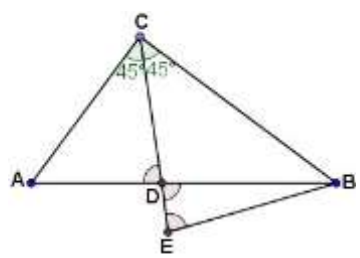


Рисунок 10: Дополнительное построение

Вариант решения 11.

Нарисуем два перпендикуляра из вершин A и B и назовем их E и F соответственно. Треугольники ∡ADE=∡BDF; ∡AED=∡BFD$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta BDF$; ∡ACE=∡BCF; ∡AEC=∡BFC$\Rightarrow$ $\Delta ACE \sim \Delta BCF$ подобны друг другу. $\Delta ADE \sim \Delta BDF$; $\Delta ACE \sim \Delta BCF$; $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BF}$; $\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{BF}$ => $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$

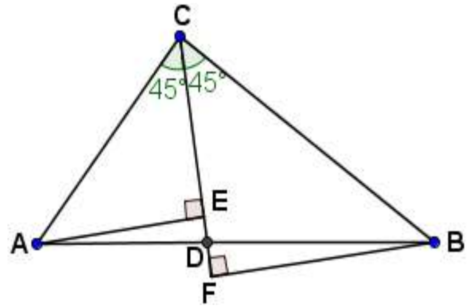


Рисунок 11: Дополнительное построение

Вариант решения 12.

Если мы обозначим буквой E точку пересечения прямой CD, проведенной параллельно стороне AC через вершину B, мы увидим, что образовался равносторонний треугольник, такой EBC со сторонами BC = BE, и посмотрим есть ли здесь подобные треугольники. Из ∡BCE = ∡BEC и вертикальных углов ∡ ADC = ∡BDE, видны два подобных треугольника

Это соотношение Это соотношение можно записать, как AC·BD= BC·AD и отсюда можно найти длину AC.

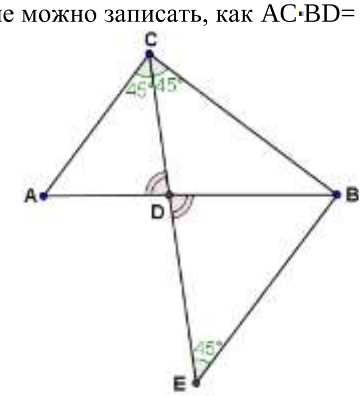


Рисунок 12: Дополнительное построение

Вариант решения 13.

Если обозначим буквой E точку пересечения прямой CD с линией, проведенной через вершину A, параллельной стороне BC, то образовался равносторонний треугольник CAE со сторонами AC = AE. Из ∡BCE = ∡BEC и вертикальных углов ∡ADE = ∡BDC => ΔAED ~ ΔBCD /два подобных треугольника/

Если написать соотношение подобных треугольников: $\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD}$; итак как AE=AC, то $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$.

$\frac{AC}{4} = \frac{15}{7} \cdot \frac{7}{20}$; $\frac{AC}{4} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $\frac{AC}{4} = \frac{3}{4}$; AC= 3 см

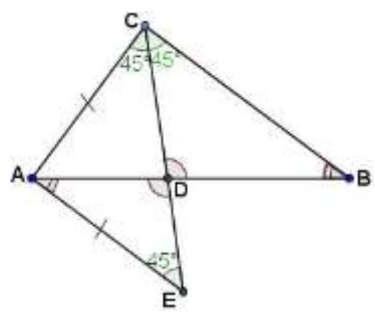


Рисунок 13: Дополнительное построение

Вариант решения 14.

Пусть E будет точкой пересечения стороны BC, проведя линию, параллельную стороне AC, через точку D. Тогда будет: AC//DE => ∡CAB=∡EDB; ∡ACD=∡CDE ΔCAB~ΔEDB. Также, CE=DE.

Если записать соотношение подобных треугольников двумя формами, то $\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{BE}$ => $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{BE}$; $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$

И если вычесть одну из двух сторон последнего соотношения, будет $\frac{AB-BD}{BD} = \frac{BC-BE}{BE}$=>$\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BE}$

Использовано: AB=AD+BD; BC=CE+BE.

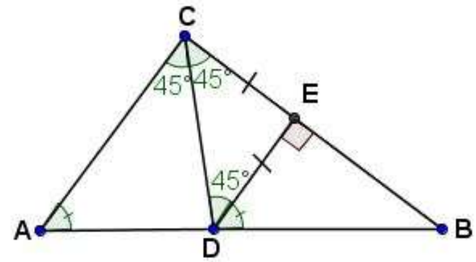


Рисунок 14: Дополнительное построение

Вариант решения 15.

Если M - точка пересечения со стороной BC окружности радиуса AC с центром в точке C, то образуется равносторонний треугольник MCB со сторонами MC = BC. Также предположим, что P - это точка, которая пересекает отрезок CD прямой линией, параллельной стороне AB, через точку M. Так как AB // PM => ∡PMC = ∡DBC, и поскольку угол B общий, то ΔDBC ~ ΔPMC; $\frac{BC}{MC}=\frac{DB}{MP}$; MC=AC => $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{MP}$. Кроме того, поскольку AK = KM и AB // PM, MPAD - четырехугольный параллелограмм, то MP = AD. Поэтому $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$.

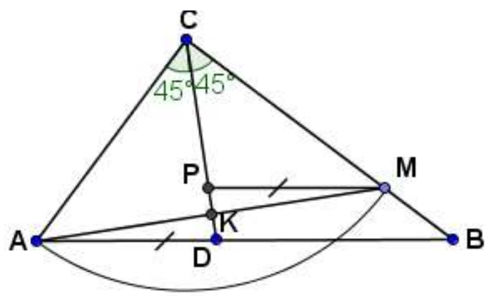


Рисунок 15: Дополнительное построение

Вариант решения 16.

Пусть E – это точка пересечения треугольника ABC с окружностью прямой, проходящей через окружность. Так как углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, мы отмечаем одинаковой чертой. ∡EAB=∡ABE=>AE=EB. Если записать соотношение следующих подобных треугольников и найти из каждого из них DC, то: $\Delta ACE\sim\Delta DCB$; $\Delta BCE\sim\Delta DCA$

$\frac{AC}{AE}=\frac{DC}{BD}$ =>DC= $\frac{AC\cdot BD}{AE}$; $\frac{BC}{BE}=\frac{DC}{AD}$ => DC= $\frac{BC\cdot AD}{BE}$. После уравнивания их с использованием AE=EB, то $AC\cdot BD=BC\cdot AD$ => $AC\cdot\frac{20}{7}=4\cdot\frac{15}{7}$; AC=3 см

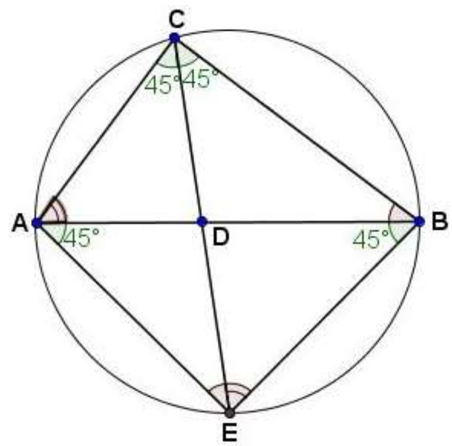


Рисунок 16: Четырехугольник, вписанный в окружность

Вариант решения 17

Проведем линию, параллельную стороне AB через вершину C и параллельную стороне AC через точку D, и отметим точку пересечения как E. Так как у ACED четыре параллелограмма, то при чертеже равных углов, узнаем, что DF=CF. Так как ∡CAB=∡FDB; /B - общий угол/

$\Delta CBA \sim \Delta FBD$ гэдгээс $\frac{BC}{AC} = \frac{FB}{FD}$ => $\frac{BC}{AC} = \frac{FB}{CF}$; $\Delta BFD \sim \Delta CFE$ $=>$ $\frac{FB}{CF} = \frac{BD}{CE}$; CE=AD, то $\frac{FB}{CF} = \frac{BD}{AD}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{FB}{CF}$; $\frac{FB}{CF} = \frac{BD}{AD}$ => $\frac{BC}{AC}$=$\frac{BD}{AD}$. Отсюда можно найти AC.

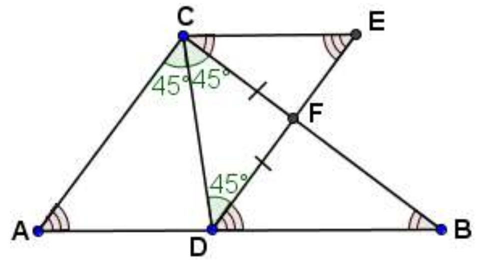


Рисунок 17: Создание параллелограмма

Вариант решения 18

Точка пересечения прямых, параллельных стороне AC, проходящей через точку D, и параллельных CD, проходящих через точку B, называем F. Исходя из того, что отрезки BF//CD=>∡FBC=∡BCD= ∡BFD =∡FDC; FD//AC =>∡BDF =∡CAB, то выходит, что BE+EC=BC; FE+ED=FD, и из BC=FD видно, что отрезки попарно равны BE=EF; DE=EC. И отсюда $\Delta DCA \sim \Delta BFD$ $=>$ $\frac{AD}{BD}$ =$\frac{AC}{FD}$; $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ можно найти длину AC.

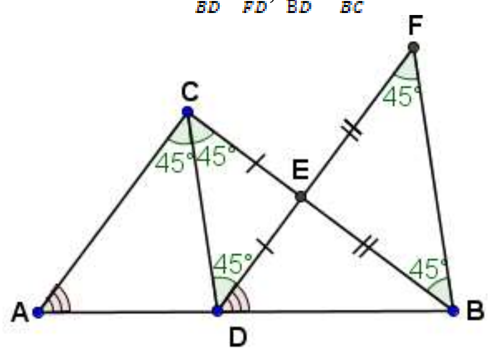


Рисунок 18: Подобные треугольники

Вариант решения 19

Пусть K - точка пересечения стороны AC и линии, проведенной параллельно стороне BC через точку D, а M - точка пересечения стороны BC с линией, проведенной параллельно со стороной BC через точку D. Так как AC//DM, ∡CDM=∡KCD; KD//BC, и ввиду, что ∡KDC=∡DCB, то выходит: $\Delta AKD \sim \Delta DMB$=>$\frac{AD}{BD} = \frac{DK}{BM}$=>$\frac{AD}{BD} = \frac{DM}{BM}$; $\Delta ABC \sim \Delta DBM$=>$\frac{AC}{BC} = \frac{DM}{BM}$ =>$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$.

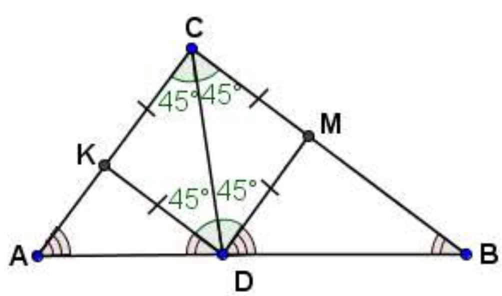


Рисунок 19: Создание квадрата

Вариант решения 20

При внесении треугольника ABC в окружность, и проведении прямой, параллельной со стороной AB, получаем равнобедренную трапецию AECB.

Так как углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, то выходит, что $\measuredangle ABC = \measuredangle ECB$.

Так как AC = CF, то получим, что FD=AD . Предполагая, что ∡DFC - внешний угол треугольника, и ∡DFC = ∡FDB + ∡FBD = ∡CAB, то находим, что ∡EBC = ∡FDB.

$\Delta EBC \sim \Delta FDB$ =>$\frac{BC}{BD} = \frac{EB}{DF}$=>$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$ гэдгээс $AC \cdot BD = BC \cdot AD$ => $AC \cdot \frac{20}{7} = 4 \cdot \frac{15}{7}$; AC=3 см

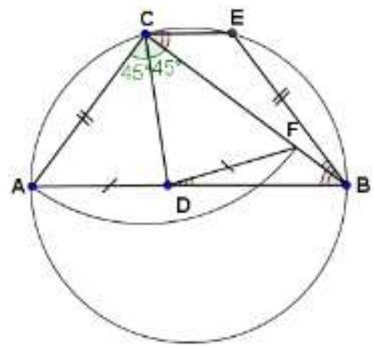


Рисунок 20: Трапеция, вписанная в окружность

Вариант решения 21

Если предположить, что K - точка пересечения прямой AC с окружностью радиуса CB с центром в точке C, то BCK - равносторонний треугольник. Нарисуем перпендикуляр к основанию KB из точек A и C и назовем F и E соответственно. /KC=BC; KE=EB/

$\Delta KFA \sim \Delta KEC$=>$\frac{KF}{KE} = \frac{AK}{KC}$; 1- $\frac{KF}{KE}$=1-$\frac{AK}{KC}$; $\frac{FE}{KE} = \frac{AC}{BC}$; $\Delta AFB \sim \Delta DEB$=>$\frac{AB}{BD} = \frac{FB}{EB}$; $\frac{AB}{BD}$-1=$\frac{FB}{EB}$-1; $\frac{AD}{BD} = \frac{FE}{EB}$
$\frac{AD}{BD} = \frac{FE}{EB}$=$\frac{FE}{KE}$=>($\frac{FE}{KE} = \frac{AC}{BC}$); ($\frac{AD}{BD}$=$\frac{FE}{KE}$) =>$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$; $\frac{AC}{4} = \frac{15}{7}:\frac{20}{7} = \frac{15}{7} \cdot \frac{7}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $\frac{AC}{4} = \frac{3}{4}$; AC=3 см

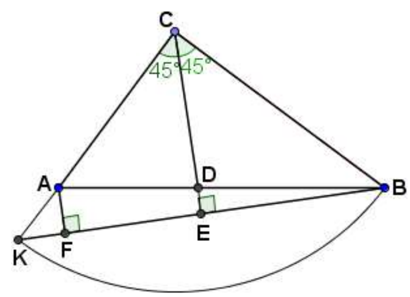


Рисунок 21: Создание равнобедренного треугольника

Вариант решения 22

Проведем прямую, параллельную биссектрисе CD через точку B и обозначим через E точку пересечения с продолжением стороны AC. Тогда CD//EB => ∡ACD=∡AEB; $\measuredangle EBC = \measuredangle CDE$ $\Delta AEB \sim \Delta ACD$. Кроме того, поскольку углы при основании равны, то CE = BC. То есть, BCE – равнобедренный треугольник. Если записать соотношение подобных треугольников, то выходит $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}$ и при вычитании с двух сторон соотношения единицу, то получаем $\frac{AE-AC}{AC} - \frac{AB-AD}{AD}$=>$\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AD}$. Использовано CE=BC.

Получаем, известное нам соотношение $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$.

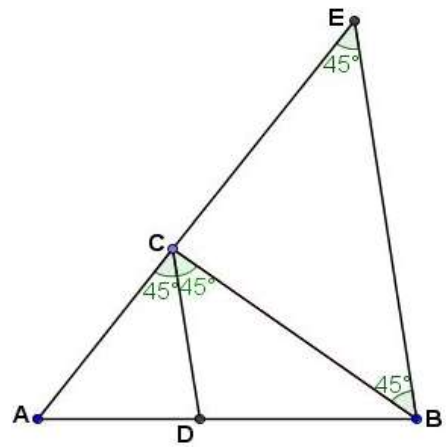


Рисунок 22: Создание подобных треугольников

Вариант решения 23

Возьмем прямую, проходящую через CD, за ось симметрии и преобразуем точки A и B в симметрию. На рисунке видно, что $S^{CD}(A) = A_1; S^{CD}(B) = B_1$.
И получаем $\Delta ADA_1 \sim \Delta BDB_1$ ба $\Delta ACA_1 \sim \Delta BCB_1$ $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AD}{BD}$; $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$ => $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

$\frac{AD}{BD} = \frac{15}{7} \cdot \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} = \frac{AC}{4}$ => AC=3 см

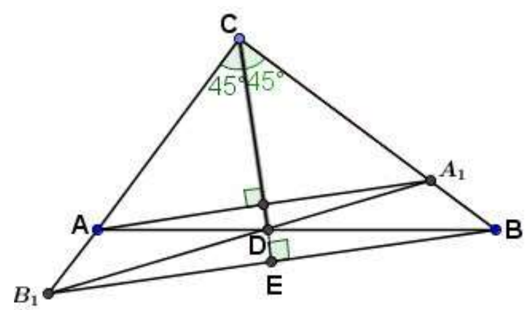


Рисунок 23: Преобразование симметрии

Вариант решения 24

Если k=$\frac{BD}{AB}$, то 1-k = $\frac{AB}{AB} - \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AB}$ /AB-BD=AD/ $\frac{k}{1-k} = \frac{BD}{AB} \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{BD}{AD}$; $\frac{k}{1-k} = \frac{BD}{AD}$;$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}+k \cdot \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ => $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$ - $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}+k \cdot (\overrightarrow{CA}$ - $\overrightarrow{CB})$=>
$\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{CA}$+(1-k)$\cdot$ $\overrightarrow{CB}$; Сейчас еще раз оглянемся на трактование рисунка решения № 4.
Заменяя по правилу параллелограмма находим AC. $\overrightarrow{CD} = \frac{CM}{CA} \cdot \overrightarrow{CA}+\frac{CN}{CB} \cdot \overrightarrow{CB}$=>$\frac{k}{1-k} = \frac{BC}{AC}$; $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$;

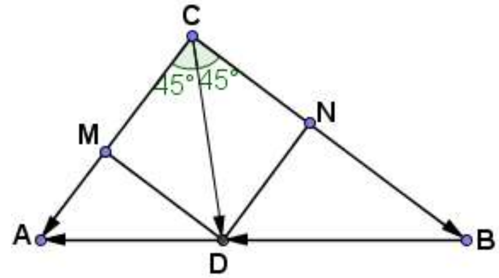


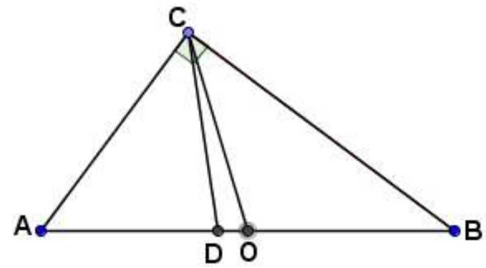
Рисунок 24: Использование вектора

Вариант решения 25

Рассмотрим, используя теорему Стюарта. AB= AD+BD= $\frac{15}{7} + \frac{20}{7} = \frac{35}{7}$; AB=5см;

Проведем медиану с вершины C: AO=OB=OC=2.5; $CO^2 \cdot AB = OB \cdot AC^2 + OA \cdot BC^2 - OB \cdot OA \cdot AB$
$2.5^2 \cdot 5 = 2.5 \cdot AC^2 + 2.5 \cdot 4^2 - 2.5 \cdot 2.5 \cdot 5$; $2.5 \cdot AC^2 + 2.5 \cdot 4^2 = 2.5^2 \cdot 5 + 2.5 \cdot 2.5 \cdot 5 = 62.5$

2.5· AC^2=62.5-40=22.5; AC^2=9; AC=3 см



Вариант решения 26

Нарисуем дугу с радиусом AC с центром в точке C, а точка пересечения со стороной BC - M представляет собой равнобедренный треугольник MCB со сторонами AC = CM. Кроме того, если точка пересечения AM и CD равна K, то AK = KB. Если в отношении треугольника MBA используем теорему Менелая, $\frac{BD}{AD} \cdot \frac{AK}{KM} \cdot \frac{MC}{BC} = 1$=> AK=KB ; AC=CM, то $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{MC}{AC}$=1; $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{AC}$=1; Отсюда сможем найти AC.

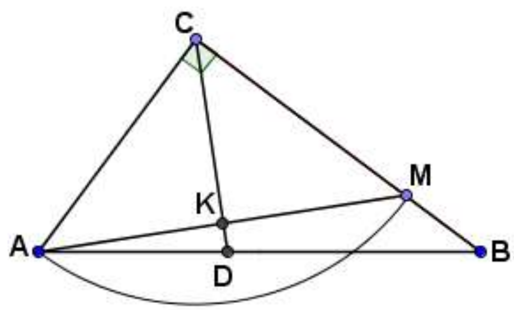


Рисунок 26: Теорема Менелая

РЕЗУЛЬТАТ

В первую очередь был проведен опрос, чтобы выяснить, овладели ли студенты способностью или знанием решения одной задачи многими способами, которая является одной из форм открытой задачи

Решение 2: Сколько вариантов нахождения площади следующего многоугольника?

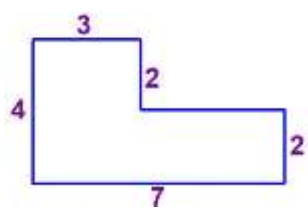


Рисунок 27: Невыпуклый многоугольник

В задании было задействовано 189 студентов, которые можно было выполнить в 8 вариантах. Из них 20 студентов неверно решили задачу, и в следующей таблице показаны результаты других студентов.

Таблица 1.

Решение студентов (Задача 2.)

Число студентов	84	43	29	11	2	0	0	0
Колчество вариантов	1	2	3	4	5	6	7	8
Процентная доля выполнения	44	23	15	6	1	0	0	0

Цель состоит в том, чтобы научить студентов так или иначе мыслить посредством независимого творческого исследования при решении одной задачи многими способами (Задача 1).

Когда задачу, которую можно было решить разными способами, отраженными в исходных заданиях, студенты-преподаватели сначала не могли решить их другими способами, кроме как по теореме Пифагора или при помощи использования свойств биссектриссы.

Чтобы поддержать других в их исследованиях, преподаватели и другие студенты-преподаватели выполняли рисунки, объясняли их, давали им идеи решения, формулов, давая им возможность самим выполнять рисунки. В течение определенного периода времени, в результате творческой деятельности мы смогли вместе поработать над 26 вариантами решения. После завершения защиты задания, был проведен опрос "какими из следующих 5 навыков вы овладели за это время?", на что получили следующий результат::

1) Визуальные навыки (познание, наблюдение свойств, чтение и понимание геометрических рисунков),

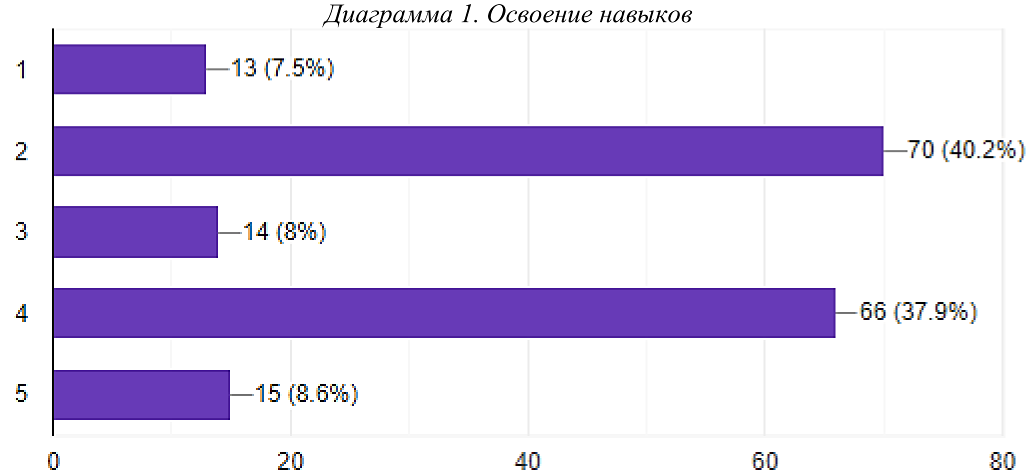
2)Навыки рисования (рисование перемещения геометрических фигур с помощью инструмента),

3) Разговорные или речевые навыки (правильное произношение терминов, произведение многих решений)

4) Логические навыки (создание и проверка гипотез, выводы с использованием предыдущих вариантов при разных условиях)

5) Навыки применения (безошибочное выполнение несложных вычислений)

Диаграмма 1. Освоение навыков



Значение этого задания заключается в том, что в результате этого задания 16 решений одной и той же задачи расширяются до 26, каждый обучающийся обнаруживает сходства и различия этих методов, и у каждого студента-преподавателя появился собственный инструмент для решения геометрических задач. С другой стороны, решение задач 26 способами улучшили зрительную, изобразительную, логическую навыки и умение правильного решения задач студентов-преподавателей.

ОБСУЖДЕНИЕ

Решение любой задачи требует знания различных математических контекстов. Содержание рассматриваемых нами задач представлено в таблице. Этот список используется, чтобы напомнить студентам-преподавателям о том, чтобы они усвоили их заранее, так как каждый из студентов-преподавателей относительно отличны друг от друга. Таким образом, самостоятельная работа для них становится понятной, интересной и творческой.

Некоторые решения данной задачи важны, поскольку студенты-преподаватели открывают для себя методы, которые являются общими и распространенными для уроков геометрии, в то время как они вообще не отражены в учебниках.

Задача: Сторона BC прямоугольного треугольника ABC составляла 4 см. Если биссектриса CD, проведенная из вершины прямоугольника, разделяет гипотенузу, как AD = $\frac{15}{7}$ см; BD = $\frac{20}{7}$ см, найдите длину стороны AC как можно большим количеством способов.

При комментировании способов своих решений студенты объяснили, какие знания и навыки им были необходимы, чтобы решить вышеуказанную задачу: Свойство биссектрисы-2/расширенное свойство биссектрисы/, Свойство подобных треугольников-2/ Свойство подобности двух разных пар треугольников/

Таблица 2.

Список содержаний, используемых при выполнении расчетов

Знания, способности	Способы решений																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Действия рациональных чисел	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Использование циркуля										*					*	*				*	*					*
Дополнительное построение				*							*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Теорема Пифагора	*																									
Свойство биссектрисы-1		*																								
Свойство биссектрисы-2			*																							
Соотношение площадей треугольников				*	*																					
Тригонометрия, основные тождества						*																				
Теорема синуса							*	*																		
Использование формул сложения									*																	
Теорема косинуса									*																	
Свойство подобных треугольников-1										*		*	*		*			*		*		*				
Свойство подобных треугольников-2											*			*		*	*		*		*		*			
Свойства параллелограмма															*											
Свойства вписанных углов																*				*						
Использование вектора																								*		
Теорема Стюарта																									*	
Теорема Менелая																										*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Организация поискового исследования - один из основных способов развития у учащихся представлений о геометрических границах и пространственного мышления на любом уровне. Такие виды деятельности, как поиск решений проблем, творческое мышление, предположения и эксперименты дают возможность использовать весь потенциал интеллектуального развития.

Одна из целей предмета "Творческое мышление" - поощрение тенденций творческих исследований студентов, сформирование у них методов обучения, повышающих их интерес.

В этой статье мы рассмотрели только одну форму открытой задачи, решаемых одну геометрическую задачу разными способами, но в будущем мы должны разработать систему руководств и заданий, таких как расширение любых задач, преобразование задачи закрытой формы в задачу с несколькими ответами.

Наше исследование показывает, что более эффективно решить одну задачу разными способами, чем работать над многими задачами одного и того же типа. Важным результатом нашего исследования стало то, что наши студенты-преподаватели самостоятельно открыли некоторые новые решения одной из этих задач (15, 19, 23, 24, 26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Charles, R., & Lester, F. (1982). Teaching problem solving: What, why and how. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
2. Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers’ knowledge. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8(3), 233–251.
3. Brousseau (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990
4. Shigeru Shimada, and Becker, Jerry P., eds. The Open - Ended Approach: A New Profosal for Teaching Mathematics/ Shigeru Shimada, and Becker, Jerry P., eds.// Translated from the 1997 Japanese version by Shigeru Shimada and Shigeo Yoshikawa. - Reston, VA: National Council of Teacher of Mathemat- ics, 1997
5. Нохда Н. Преподавание и оценивание, используя «открытые» задачи в классе/ Н. Нохда. - Университет Цукубы, 1991
6. Ивлев Б. , Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" 1985, №2
7. Schoenfeld, A. H. (1983). Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
8. Галиуллина Е.Н. Развитие мотивации творческого самосовершен ствования и самореализации студентов педфака через обучение решения «открытых» задач / Е.Н. Галиуллина// Самосовершенствование, самореализация личности, психолого-педагогические аспекты: материалы Второй международной научно-практической конференции. Набережные Челны: Изд-во НГПИ. 2004
9. Polya, G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematics method. Princeton, NJ: Princeton University Press.

10. Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 33–60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

11. Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(4), 203–223.

References

1. Charles, R., & Lester, F. (1982). Teaching problem solving: What, why and how. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

2. Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8(3), 233–251.

3. Brousseau (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990

4. Shigeru Shimada, and Becker, Jerry P., eds. The Open - Ended Approach: A New Profosal for Teaching Mathematics/ Shigeru Shimada, and Becker, Jerry P., eds.// Translated from the 1997 Japanese version by Shigeru Shimada and Shigeo Yoshikawa. - Reston, VA: National Council of Teacher of Mathemat- ics, 1997

5. Nokhda N. Prepodavaniye i otsenivaniye, ispol'zuya «otkrytyye» zadachi v klasse/ N. Nokhda. - Universitet Tsukuby, 1991

6. Ivlev B. , Nauchno-populyarnyy fiziko-matematicheskiy zhurnal "Kvant"1985, №2

7. Schoenfeld, A. H. (1983). Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

8. Galiullina E.N. Development of motivation for creative self-improvement and self-realization of pedagogical faculty students through training in solving "open" problems. Galiullina // Samosovershenstvovaniye, samorealizatsiya lichnosti, psikhologo-pedagogicheskiye aspekty: materialy Vtoroy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Naberezhnyye Chelny: Publishing house of NGPI. 2004

9. Polya, G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematics method. Princeton, NJ: Princeton University Press.

10. Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 33–60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

11. Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(4), 203–223.